



Bonaventura de' Vidovich

APPROCCIO INTEGRALE
ALLA STATICA DELLA NAVE

TRIESTE – MMIII

La proprietà intellettuale della presente opera è dell'autore.
La distribuzione e la riproduzione, sia su supporto cartaceo che
informatico, sono **libere** e **gratuite**. L'edizione informatica è
disponibile in rete nel sito *bonaventura.com*.

Autore: Bonaventura de'Vidovich
via Ugo Polonio 5 - 34125 Trieste - Italia
ing@bonaventura.com - <http://bonaventura.com>

APPROCCIO INTEGRALE

ALLA STATICA DELLA NAVE

§ 1. Introduzione

Nella fisica, e nell'ingegneria che ne è la disciplina applicativa, sono di particolare interesse le formule *integrali*¹ le quali creano delle relazioni tra grandezze macroscopiche. La loro utilità discende dal fatto pratico che le grandezze macroscopiche sono quelle che interessano ma anche dalla constatazione *filosofico-matematica* che la *derivazione* è un'operazione *semplice*, che si può sempre fare e che chiunque è in grado di fare applicando meccanicamente le regole di derivazione mentre l'*integrazione* è *difficile* perché non sempre si può portare a termine e spesso non basta l'applicazione pedissequa e passiva di regole e metodi ma occorre l'ingegno attivo.

Per fare qualche esempio chiarificatore possiamo pensare alla *scienza delle costruzioni* ed al problema di *de Saint Venant*: le quattordici equazioni differenziali da cui si parte² sono ben poco fruibili ai fini pratici ma la formula di *Navier*, che ne deriva per integrazione,

$$\sigma = \frac{M}{I}\eta$$

1. Così dette perché sono il frutto di un'integrazione

2. Omesse per brevità

è universalmente conosciuta ed usata.

Allo stesso modo nell'*idraulica* le equazioni differenziali derivanti dal principio di conservazione della quantità di moto

$$\begin{cases} \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ \varrho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ \varrho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \end{cases}$$

sono abbastanza insipide mentre l'equazione di *Bernoulli*

$$\frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$$

viene usata sistematicamente ed utilmente anche da chi non conosce il principio di conservazione della quantità di moto.

Nelle applicazioni della *statica della nave* è di notevole interesse la determinazione dell'energia accumulata da una nave a seguito di uno sbandamento; solitamente quest'energia si calcola integrando la curva dei bracci di stabilità. Tale procedimento è corretto ma ha alcune controindicazioni: la macchinosità del calcolo e la scarsa precisione. L'integrazione viene eseguita per punti utilizzando un metodo di quadratura approssimata; la precisione dipende dal numero di punti presi in considerazione dunque, se si desidera un risultato affidabile, è necessario calcolare molte situazioni intermedie. In conclusione i tempi per un calcolo del genere sono sensibili, anche se fatti da un calcolatore, ed il risultato, comunque, è affetto da un certo errore. Nelle seguenti pagine mostreremo che esiste una formula *integrale* per il calcolo di detta energia dipendente **soltanto** dalla posizione mutua del centro di carena e del centro di spinta nelle due situazioni limite³. Utilizzando tale formula è possibile ottenere rapidamente risultati affidabili ed è altresì realizzabile una variante ai diagrammi (o tabelle) delle *pantocarene isocline* che permette di verificare quasi istantaneamente l'*area sottesa dal diagramma dei \overline{GZ}* per una qualunque condizione di carico. In fine tale impostazione ha notevoli vantaggi anche in fase progettuale sia per la chiarezza delle indicazioni che per la velocità delle verifiche che per la semplicità di eventuali algoritmi d'ottimizzazione.

I risultati ottenuti non sono scaturiti da complicate integrazioni, che sono pure possibili, ma da un semplice ragionamento: *dove va a finire l'energia che una nave accumula quando viene fatta sbandare?* Gli elementi su cui agiamo sono la nave ed il mare soggetti entrambi solo alla

3. Le situazioni iniziale e finale dello sbandamento nel corso del quale viene accumulata l'energia che si vuole calcolare.

forza di gravità⁴ pertanto il lavoro compiuto per lo sbandamento diventa energia potenziale gravitazionale della nave e dell'acqua in cui la nave galleggia; in pratica *solleviamo* il baricentro del sistema *nave-mare*.

Prima di entrare nel *vivo* del problema è bene fare due precisazioni.

- In seguito parleremo di nave, acqua e mare e non genericamente di galleggiante e fluido perché, trattando la **statica della nave**, sarebbe fuori luogo e fastidioso fare inutili perifrasi per mantenere la generalità del problema; è, tuttavia, ovvio che, qualora ricorrano le ipotesi, i risultati possono essere estesi ai più disparati problemi.
- La trattazione che segue è ben più ampia del minimo che basterebbe a dimostrare quanto detto. Tale scelta è volta a sviluppare con completezza l'argomento sia a fini didattici che per fugare da chi applicherà le formule esposte, ogni dubbio sulla correttezza e sull'applicabilità delle stesse.

§ 2. Ipotesi e definizioni

Nei ragionamenti che andiamo ad intraprendere adottiamo le usuali convenzioni ed ipotesi della *statica della nave*.

L'accelerazione di gravità è un vettore costante in direzione, e modulo (g) in ogni punto dello spazio. L'asse di riferimento assoluto per le quote è q , ha direzione uguale all'accelerazione di gravità e verso contrario; la sua origine è arbitraria ma fissa. L'asse ζ è parallelo a q ma ha origine in corrispondenza della superficie del mare.

L'acqua è un fluido ideale⁵, in quiete, omogeneo ed uniforme la cui densità⁶ è ρ . Di conseguenza il piano del pelo libero dell'acqua è perpendicolare all'accelerazione di gravità.

La nave esternamente è un corpo rigido la cui massa M_N è costante ma la posizione del suo centro di gravità è soggetta a variazioni dovute a spostamenti interni⁷. Indichiamo con ζ_C la quota del centro di carena e con ζ_G la quota del centro di gravità della nave misurate entrambe dal pelo libero dell'acqua; si noti che ζ_C è sempre negativo mentre ζ_G può essere positivo, negativo o nullo a seconda dei casi. È bene ricordare che la posizione della nave è arbitraria dunque può **non** essere in una situazione d'equilibrio⁸.

4. Oltre che al momento sbandante.

5. È incompressibile, non trasmette sforzi tangenziali ed è privo di tensione superficiale.

6. Massa per unità di volume

7. Carichi sospesi, specchi liquidi, ecc.

8. Il peso della nave può essere differente dalla spinta idrostatica e la retta congiungente i centri di carena e di gravità può non essere parallela all'accelerazione di gravità.

Definiamo **energia di galleggiamento** la somma dell'energia potenziale gravitazionale della nave e dell'acqua in cui la nave galleggia. Per calcolare l'energia potenziale dell'acqua bisogna in qualche modo limitarne le dimensioni e, dunque, considerare che la nave si trovi in un bacino (golfo, mare, lago o altro).

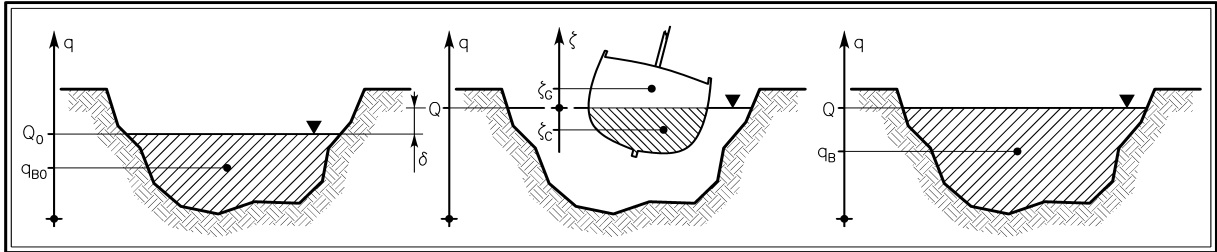


TAVOLA I – Riferimenti e definizioni

Indichiamo con V_A il volume d'acqua contenuta nel bacino e con V_C il volume di carena della nave. Diciamo Q_0 il livello dell'acqua all'interno del bacino (misurato sull'asse q) se in esso fosse contenuto soltanto il volume d'acqua V_A ed q_{B0} la quota del centro di detto volume. Sia Q il livello dell'acqua quando è presente anche la nave; quest'ultima sposta un volume V_C dunque bisognerebbe riempire il bacino con un volume d'acqua $V_A + V_C$ per raggiungere lo stesso livello senza la nave; la quota del centro di questo volume sia q_B . Definiamo, quindi, la differenza tra i livelli dell'acqua nelle due situazioni

$$(1) \quad \delta = Q - Q_0$$

e le componenti verticali dei momenti statici dei volumi ora introdotti

$$(2) \quad S_{B0} = V_A q_{B0} \quad S_B = (V_A + V_C) q_B \quad .$$

Notiamo che le seguenti grandezze sono costanti cioè non dipendono dal galleggiamento della nave né variano al mutare di questo: V_A , Q_0 , q_{B0} , S_{B0} , M_N , ϱ , g .

§ 3. Energia di galleggiamento, altezza del galleggiamento ed altezza dello sbandamento

Dalla meccanica razionale sappiamo che l'energia potenziale gravitazionale vale, a meno di una costante che dipende dalla scelta dell'origine,

$$(3) \quad E_P = g q M$$

in cui q è la quota del baricentro del corpo di oggetto.

Preliminarmente calcoliamo S_B sapendo che il centro della zona compresa tra i livelli Q_0 ed Q ha una quota che indichiamo genericamente con $Q_0 + (1 - k)\delta$ ove $0 < k < 1$

$$(4) \quad S_B = V_A q_{B0} + V_C \left[Q_0 + (1 - k) \delta \right] .$$

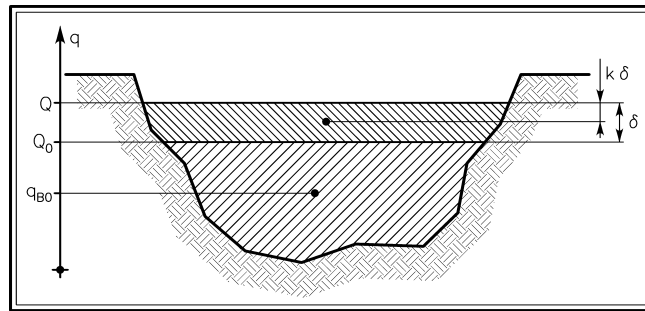


TAVOLA II – Calcolo di S_B

La posizione verticale del centro di gravità dell'acqua q_A corrisponde al centro geometrico del volume occupato; il momento statico di tale volume è

$$(5) \quad \begin{aligned} S_A &= V_A q_A = S_B - V_C (\zeta_C + Q) = \underbrace{V_A q_{B0}}_{S_{B0}} + V_C \left[Q_0 + (1 - k) \delta \right] - V_C (\zeta_C + Q) = \\ &= S_{B0} - V_C \left[\underbrace{\zeta_C + Q - Q_0}_{\delta} - (1 - k) \delta \right] = S_{B0} - V_C (\zeta_C + k \delta) \end{aligned}$$

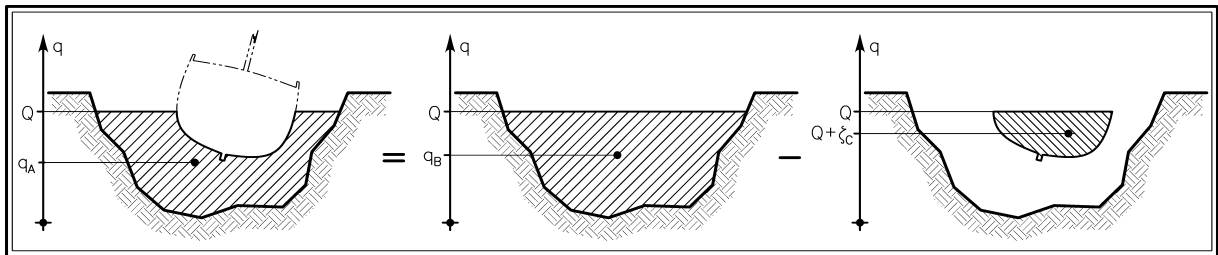


TAVOLA III – Calcolo di S_A

mentre la quota del centro di gravità della nave risulta semplicemente

$$(6) \quad q_N = \zeta_G + Q = \zeta_G + Q_0 + \delta .$$

Pertanto l'energia potenziale dell'acqua è

$$(7) \quad \begin{aligned} E'''_{PA} &= \varrho g \underbrace{V_A q_A}_{S_A} = \varrho g [S_{B0} - V_C (\zeta_C + k \delta)] = \\ &= -\varrho g V_C (\zeta_C + k \delta) + \varrho g S_{B0} \end{aligned}$$

mentre quella della nave risulta

$$(8) \quad E'''_{PN} = g M_N q_N = g M_N (\zeta_G + Q_0 + \delta) = g M_N (\zeta_G + \delta) + g M_N Q_0 \quad .$$

Notiamo che $\varrho g S_{B0}$ ed $g M_N Q_0$ sono costanti cioè non dipendono dalla posizione né dalle caratteristiche della nave pertanto, essendo l'energia potenziale definita a meno di una costante addittiva arbitraria, possono essere omessi ottenendo

$$(9) \quad \begin{cases} E''_{PA} = -\varrho g V_C (\zeta_C + k \delta) \\ E''_{PN} = g M_N (\zeta_G + \delta) \end{cases}$$

dunque l'energia di galleggiamento, che ne è la somma, risulta

$$(10) \quad E''_G = E''_{PA} + E''_{PN} = g M_N \zeta_G - \varrho g V_C \zeta_C + g (M_N - k \varrho V_C) \delta$$

Introduciamo, dunque, l'ipotesi che **le variazioni di livello dell'acqua del bacino siano trascurabili** che corrisponde alla comune esperienza essendo solitamente le dimensioni del bacino (mare, lago, ecc.) notevolmente superiori a quelle della nave. Come vedremo più avanti, questa ipotesi non è accettabile quando la nave si trova in un bacino ristretto quale può essere un bacino di carenaggio o tra le chiuse di un canale. Tuttavia, se consideriamo soltanto galleggiamenti isocarenici della nave (che sono i casi più interessanti) allora V_C è costante e, dunque, lo è anche il livello dell'acqua nel bacino qualunque siano le sue dimensioni. Pertanto possiamo porre

$$(11) \quad \delta = \text{costante}$$

se si verifica **almeno** una delle seguenti condizioni:

- a. il bacino è molto più grande della nave,
- b. consideriamo soltanto galleggiamenti isocarenici.

In queste ipotesi, omettendo i termini costanti o trascurabili, possiamo scrivere semplicemente

$$(12) \quad E'_G = g M_N \zeta_G - \varrho g V_C \zeta_C$$

In tutti i casi in cui il peso ($g M_N$) e la spinta ($\varrho g V_C$) sono uguali⁹ la formula dell'energia di galleggiamento diventa semplicemente

$$(13) \quad E_G = g M_N (\zeta_G - \zeta_C)$$

9. Il galleggiamento è isocarenico al galleggiamento d'equilibrio.

È opportuno mettere in evidenza che l'energia di galleggiamento, essendo un'energia potenziale, non ha senso come valore a sè stante ma soltanto se confrontata con quella di un'altro galleggiamento. Pertanto si devono usare quelle formule le cui ipotesi sono assolute da entrambi i galleggiamenti presi in considerazione¹⁰.

Spesso nell'architettura navale, come pure nell'idraulica, si utilizza l'**energia per unità di peso** che assume le dimensioni ed il significato di una lunghezza. Chiamiamo questa grandezza semplicemente **altezza** di un galleggiamento e la indicheremo con h e con $H_{1,2}$ la variazione d'altezza tra due galleggiamenti

$$(14) \quad h = \frac{E_G}{g M_N} \quad H_{1,2} = h_2 - h_1.$$

In particolare la (13) assume una forma particolarmente semplice, significativa ed utile

$$(15) \quad h = \zeta_G - \zeta_C$$

(si noti che, ai fini di questa formula, è indifferente la scelta dell'origine dell'asse ζ). Diremo H *altezza della variazione di galleggiamento*; nei casi in cui i due galleggiamenti estremi siano isocarenici la chiameremo *altezza dell'inclinazione* e, se l'inclinazione è trasversale¹¹, **altezza dello sbandamento**.

La variazione d'altezza ha le dimensioni di una lunghezza ma corrisponde, anche numericamente, all'area sottesa dal diagramma dei \overline{GZ} che ha le dimensioni di una lunghezza per un angolo¹² (in radianti).

TABELLA I – Riepilogo di formule ed ipotesi

E_G	h	ipotesi limitative
$g M_N (\zeta_G + \delta) - \rho g V_C (\zeta_C + k\delta)$	$\zeta_G + \delta - \frac{\rho V_C}{M_N} (\zeta_C + k\delta)$	nessuna
$g M_N \zeta_G - \rho g V_C \zeta_C$	$\zeta_G - \frac{\rho V_C}{M_N} \zeta_C$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{bacino} \gg \text{nave} \\ \text{oppure} \\ \text{isocarene} \end{array} \right.$
$g M_N (\zeta_G - \zeta_C)$	$\zeta_G - \zeta_C$	peso = spinta

10. I diversi apici servono proprio a ricordare l'*incomparabilità* dei risultati.

11. Con eventuale assetto per bilanciare longitudinalmente la nave.

12. Tale apparente incongruenza è dovuta al fatto che gli angoli, ancorchè indicati nelle dimensioni, sono **adimensionali**. Facciamo un semplice esempio per chiarire le idee: prendiamo un momento M [FL], gli facciamo compiere una rotazione α [RAD], il lavoro risultante è $L = M \alpha$ dunque le sue dimensioni sono [FL RAD] ma, d'altro canto, sappiamo che ogni lavoro ha le dimensioni di una forza per una lunghezza [FL]; siamo ricaduti nella stessa apparente contraddizione!

§ 4. Esempio numerico

Nella massima parte delle situazioni reali la formula da usare è la (15)

$$h = \zeta_G - \zeta_C$$

che è anche la più semplice; questa situazione potrebbe indurre molti a dimenticare che non è sempre applicabile. A tale scopo forniamo un esempio in cui bisogna applicare la formula generale cioè l'equivalente della (10) come riportata nella TABELLA I

$$(16) \quad h'' = \zeta_G + \delta - \frac{\rho V_C}{M_N} (\zeta_C + k \delta) \quad .$$

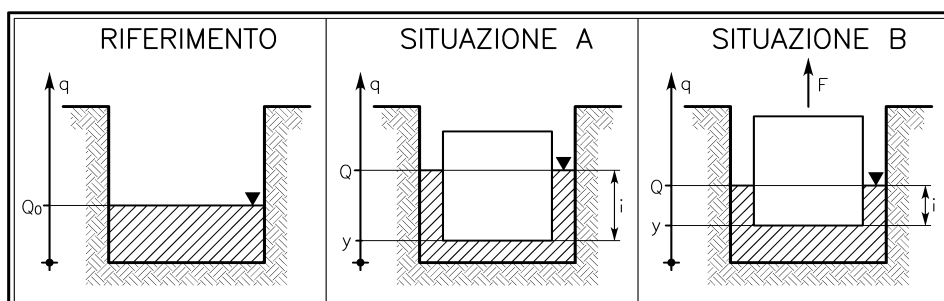


TAVOLA IV – Esempio

Supponiamo di avere una vasca di forma cubica di lato $l_V = 1 \text{ m}$ riempita con $V_A = 0,5 \text{ m}^3$ d'acqua dolce ($\rho = 1000 \text{ kg:m}^3$). L'area delle sezioni orizzontali è

$$A_B = l_V^2 = 1 \text{ m}^2 \quad ;$$

se poniamo l'origine dell'asse q sul fondo della vasca allora

$$Q_0 = \frac{V_A}{A_B} = 0,5 \text{ m} \quad .$$

Introduciamo un cubo di legno omogeneo con massa¹³ $M_N = 200 \text{ kg}$ e di lato $l = 0,7 \text{ m}$. Nella situazione **A** lasciamo galleggiare liberamente il cubo con una faccia orizzontale. Il volume di carena e l'area della figura di galleggiamento sono

$$V_C = \frac{M_N}{\rho} = 0,2 \text{ m}^3 \quad \text{ed} \quad A_{GG} = l^2 = 0,49 \text{ m}^2$$

mentre l'immersione e le quote dei centri di carena e di gravità risultano

$$i = \frac{V_C}{A_{GG}} = 0,4082 \text{ m} \quad , \quad \zeta_C = -\frac{i}{2} = -0,2041 \text{ m} \quad \text{e} \quad \zeta_G = \frac{l}{2} - i = -0,0582 \text{ m} \quad .$$

13. Manteniamo il pedice N per uniformità di simbologia anche se, ovviamente, non si tratta di una nave.

Il livello dell'acqua, la distanza del fondo del cubo dal fondo della vasca e la differenza di livello sono

$$Q = \frac{V_A + V_C}{A_B} = 0,7 \text{ m} \quad , \quad y = Q - i = 0,2918 \text{ m} \quad \text{e} \quad \delta = Q - Q_0 = 0,2 \text{ m}$$

mentre $k = 0,5$ perché la vasca ha le pareti verticali.

Calcoliamo, quindi, l'altezza del galleggiamento A con la (16)

$$h''_A = \zeta_G + \delta - \frac{\rho V_C}{M_N} (\zeta_C + k \delta) = -0,0582 + 0,2 - \frac{1000 \times 0,2}{200} (-0,2041 + 0,5 \times 0,2) = 0,2459 \text{ m}$$

e, soltanto per provarne l'inapplicabilità, con la (15)

$$h_A = \zeta_G - \zeta_C = -0,0582 - (-0,2041) = 0,1459 \text{ m} \quad .$$

Ora, per portarci nella situazione **B**, supponiamo di sollevare il cubo di $0,1 \text{ m}$; dunque la distanza del fondo del cubo dal fondo della vasca diventa $y = 0,3918 \text{ m}$. Per determinare il livello dell'acqua Q impostiamo un'equazione basata sul fatto che il volume dell'acqua V_A non muta

$$V_A = Q A_B - \underbrace{i A_{GG}}_{V_C} = Q A_B - \underbrace{(Q - y) A_{GG}}_i = Q (A_B - A_{GG}) + y A_{GG}$$

dalla quale ricaviamo

$$(17) \quad Q = \frac{V_A - y A_{GG}}{A_B - A_{GG}} = 0,6040 \text{ m} \quad .$$

Calcoliamo rapidamente

$$\delta = Q - Q_0 = 0,1040 \text{ m} \quad i = Q - y = 0,2122 \text{ m} \quad V_C = i A_{GG} = 0,1040 \text{ m}^3$$

$$\zeta_C = -\frac{i}{2} = -0,1061 \text{ m} \quad \zeta_G = \frac{l}{2} - i = 0,1378 \text{ m}$$

e determiniamo l'altezza del galleggiamento B con entrambe le formule (16) e (15)

$$\begin{aligned} h''_B &= \zeta_G + \delta - \frac{\rho V_C}{M_N} (\zeta_C + k \delta) = \\ &= 0,1378 + 0,1040 - \frac{1000 \times 0,1040}{200} (-0,1061 + 0,5 \times 0,1040) = 0,2699 \text{ m} \end{aligned}$$

$$h_B = \zeta_G - \zeta_C = 0,1378 - (-0,1061) = 0,2439 \text{ m} \quad .$$

Pertanto l'altezza della variazione di galleggiamento da A a B risulta, con le due diverse formule,

$$H''_{A,B} = h''_B - h''_A = 0,2699 - 0,2459 = 0,0240 \text{ m}$$

$$H_{A,B} = h_B - h_G A = 0,2439 - 0,1459 = 0,0980 \text{ m}$$

ed è evidente che la differenza è sostanziale.

Calcoliamo per integrazione il lavoro compiuto nel sollevamento. Per ogni valore assunto dalla distanza del fondo del cubo dal fondo della vasca y possiamo calcolare il livello dell'acqua Q con la (17), dal livello determiniamo l'immersione i e con questa il volume di carena V_C .

$$V_C = \underbrace{(Q - y)}_i A_{GG} = \left(\frac{V_A - y A_{GG}}{A_B - A_{GG}} - y \right) A_{GG} = \frac{A_{GG}}{A_B - A_{GG}} (V_A - y A_B)$$

La forza agente sul cubo è pari al peso meno la spinta

$$F = P - S = g M_N - \varrho g V_C = g \left[M_N - \varrho \frac{A_{GG}}{A_B - A_{GG}} (V_A - y A_B) \right] .$$

ed il lavoro compiuto per sollevare il cubo può essere calcolato con l'integrale

$$\begin{aligned} L &= \int_{y_A}^{y_B} F dy = \int_{y_A}^{y_B} g \left[M_N - \varrho \frac{A_{GG}}{A_B - A_{GG}} (V_A - y A_B) \right] dy = \\ &= g \left[\left(M_N - \varrho \frac{A_{GG}}{A_B - A_{GG}} V_A \right) (y_B - y_A) + \frac{\varrho A_{GG} A_B}{A_B - A_{GG}} \cdot \frac{y_B^2 - y_A^2}{2} \right] = \\ &= g \left[\left(200 - 1000 \frac{0,49}{1 - 0,49} 0,5 \right) (0,3918 - 0,2918) + \frac{1000 \times 0,49 \times 1}{1 - 0,49} \cdot \frac{0,3918^2 - 0,2918^2}{2} \right] = \\ &= 4,8004 g = 4,8004 \times 9,80665 = 47,077 \text{ Joule} \end{aligned}$$

pertanto il lavoro specifico risulta

$$\frac{L}{gM} = \frac{47,077}{200 \times 9,80665} = 0,240 \text{ m}$$

che, com'era inevitabile, corrisponde ad $H''_{A,B}$ a riprova che la (15), in questo caso, è inapplicabile.

§ 5. Calcolo dell'altezza di un galleggiamento dalle carene inclinate

I calcoli delle carene inclinate forniscono la posizione del centro di carena C e del centro di gravità G nel sistema di coordinate della nave $Oxyz$. L'origine è solitamente posta sulla linea di costruzione in corrispondenza della perpendicolare al mezzo o della perpendicolare addietro, x è l'asse longitudinale con verso positivo a prora, y è l'asse trasversale positivo a sinistra e z è verticale positivo verso l'alto.

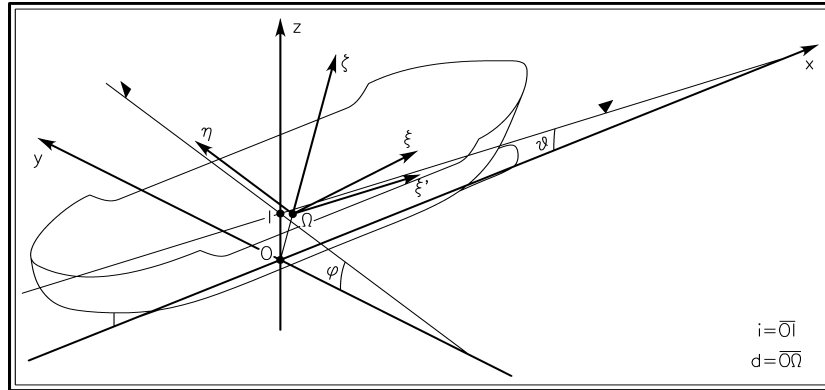


TAVOLA V – Sistema di riferimento NAVE e sistema di riferimento MARE

Un qualunque galleggiamento è individuato dal piano di galleggiamento cioè da quel piano corrispondente al pelo libero dell'acqua. Chiamiamo I il punto intersezione di questo piano con l'asse z ; la distanza \overline{OI} corrisponde all'immersione della nave i . L'angolo di sbandamento (trasversale) φ è misurato tra l'asse y e la traccia del piano di galleggiamento sul piano yz ; è positivo se corrisponde ad uno sbandamento a sinistra della nave. L'angolo d'assetto (longitudinale) ϑ è individuato dall'asse x e la traccia del piano di galleggiamento sul piano xz , assunto positivo se corrisponde ad un appoppamento della nave.

Possiamo definire i versori associati alle tracce ora citate con verso positivo, rispettivamente, a proravia ed a sinistra

$$(18) \quad \begin{cases} \widehat{\xi}' = (\cos\vartheta, 0, -\sin\vartheta) \\ \widehat{\eta} = (0, \cos\varphi, \sin\varphi) \end{cases}$$

(si noti che $\widehat{\xi}'$ e $\widehat{\eta}$ **non** sono sempre ortogonali). Un vettore normale al piano di galleggiamento e positivo verso l'alto è

$$(19) \quad \vec{\zeta} = \widehat{\xi}' \times \widehat{\eta} = (\sin\vartheta \cos\varphi, -\cos\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta \cos\varphi) \quad ;$$

il modulo di tale vettore è

$$(20) \quad \begin{aligned} \|\vec{\zeta}\| &= \sqrt{\sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \cos^2\vartheta \cos^2\varphi} = \\ &= \sqrt{\cos^2\varphi (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) + (1 - \sin^2\vartheta) \sin^2\varphi} = \\ &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi} \end{aligned}$$

dunque il versore normale al piano di galleggiamento è

$$(21) \quad \widehat{\zeta} = \frac{\vec{\zeta}}{\|\vec{\zeta}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta \text{sen}^2\varphi}} (\text{sen}\vartheta \cos\varphi, -\cos\vartheta \text{sen}\varphi, \cos\vartheta \cos\varphi) \quad .$$

Il versore normale a $\widehat{\eta}$ e $\widehat{\zeta}$ e giacente, di conseguenza, nel piano di galleggiamento è

$$(22) \quad \widehat{\xi} = \widehat{\eta} \times \widehat{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta \text{sen}^2\varphi}} (\cos\vartheta, \text{sen}\vartheta \text{sen}\varphi \cos\varphi, -\text{sen}\vartheta \cos^2\varphi) \quad .$$

Assumiamo come origine del sistema il punto Ω intersezione del piano di galleggiamento con la retta passante per O e parallela a $\widehat{\zeta}$. Definendo d la distanza $\overline{O\Omega}$, introducendo due parametri di calcolo λ e μ ed essendo, al solito, \widehat{k} il versore associato all'asse z possiamo scrivere il sistema lineare in forma vettoriale

$$(23) \quad i \widehat{k} + \lambda \widehat{\xi} + \mu \widehat{\eta} = d \widehat{\zeta}$$

la cui soluzione, particolarmente semplice con il metodo di *Cramer*, ci permette di determinare d che, assieme a $\widehat{\zeta}$, individua Ω .

$$(24) \quad d = i \cos\varphi \cos\vartheta$$

Quando il piano di galleggiamento è ortogonale al piano xy non ha senso i e molte delle formule che abbiamo scritto e che scriveremo possono essere determinate soltanto con l'uso dei limiti.

Di un qualunque punto definito dalle coordinate *nave* (x, y, z) possiamo calcolare le coordinate nel sistema di riferimento *mare* (ξ, η, ζ)

$$(25) \quad \begin{cases} \xi = (x, y, z) \cdot \widehat{\xi} \\ \eta = (x, y, z) \cdot \widehat{\eta} \\ \zeta = (x, y, z) \cdot \widehat{\zeta} - d \end{cases}$$

Per calcolare l'altezza di un galleggiamento ci serve soltanto la coordinata ζ che, in dettaglio, è determinata dalla formula

$$(26) \quad \zeta = \frac{x \text{sen}\vartheta \cos\varphi - y \cos\vartheta \text{sen}\varphi + z \cos\vartheta \cos\varphi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta \text{sen}^2\varphi}} - d$$

e, nei casi in cui l'altezza di un galleggiamento sia calcolabile con la (15) (cioè quando il peso della nave equivale alla spinta in tutti i galleggiamenti presi in considerazione)

$$(27) \quad h = \zeta_G - \zeta_C = \frac{(x_G - x_C) \text{sen}\vartheta \cos\varphi - (y_G - y_C) \cos\vartheta \text{sen}\varphi + (z_G - z_C) \cos\vartheta \cos\varphi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta \text{sen}^2\varphi}} \quad .$$

§ 6. Inclinazioni trasversali

Nell'architettura navale classica si studiano gli sbandamenti¹⁴ trascurando gli assetti¹⁵; in questo modo il centro di carena ed il centro di gravità risultano longitudinalmente disallineati cioè, in una vista longitudinale, la retta che li unisce non è perpendicolare al piano di galleggiamento; per ovviare a tale inconveniente si proiettano i punti¹⁶ d'interesse sul piano trasversale yz con rette parallele ad x dimenticando lo sbilanciamento longitudinale visto che quasi sempre ha effetti modesti. Quest'impostazione fù senz'altro giusta ai tempi d'*Eulero* perché si trascurava ciò che nessuno si sarebbe mai sobbarcato l'improbabile onere di calcolare. Oggi, essendosi affermato l'uso dei calcolatori da qualche decennio, il tutto v'è rivisto.

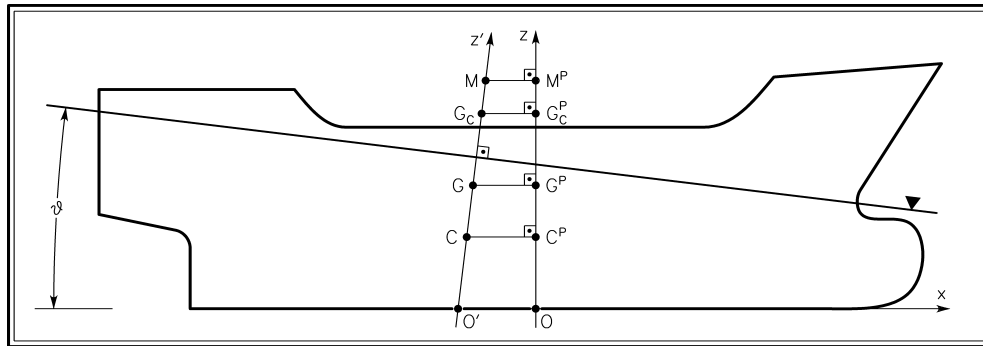


TAVOLA VI – Effetti dell'assetto nel calcolo dello sbandamento

Con i moderni mezzi di calcolo automatico è possibile tener conto degli assetti della nave *a basso costo*. Ciò viene già fatto ma, dopo aver calcolato esattamente la posizione dei vari punti considerando anche l'assetto, comunemente si continua a proiettarli sul piano yz anche se, avendo bilanciato longitudinalmente la nave, tutti i punti che ci interessano giacciono su un piano $y'z'$ perpendicolare al piano di galleggiamento ed al piano xz e formante, con il piano trasversale, un angolo diedro pari a ϑ .

Definiamo il sistema di riferimento $O'y'z'$ nel piano contenete C e G . L'origine viene posta all'intersezione del piano con l'asse x , l'asse y' è parallelo ed equiverso all'asse y e l'asse z' viene scelto normale a y' ed in modo che il suo verso positivo formi con il verso positivo dell'asse z un angolo ϑ . La relazione tra le coordinate dei punti sul piano $y'z'$ e le coordinate delle relative proiezioni su yz sono

$$(28) \quad y = y' \quad \text{e} \quad z = z' \cos \vartheta \quad .$$

14. Inclinazioni trasversali della nave φ .

15. Inclinazioni longitudinali della nave ϑ .

16. Indichiamo con l'apice P la proiezione dei punti sul piano yz .

Essendo l'angolo ϑ relativamente piccolo¹⁷ la differenza pratica tra i calcoli condotti nel piano yz e quelli nel piano $y'z'$ è quasi sempre trascurabile¹⁸. V'è altresì sottolineato che l'angolo φ' che forma la traccia del piano di galleggiamento sul piano $y'z'$ con l'asse y' non corrisponde esattamente all'angolo di sbandamento φ (anche se la differenza tra i due è spesso trascurabile) ma è ad esso legato dalla relazione

$$(29) \quad \operatorname{tg}\varphi = \cos\vartheta \operatorname{tg}\varphi' \quad .$$

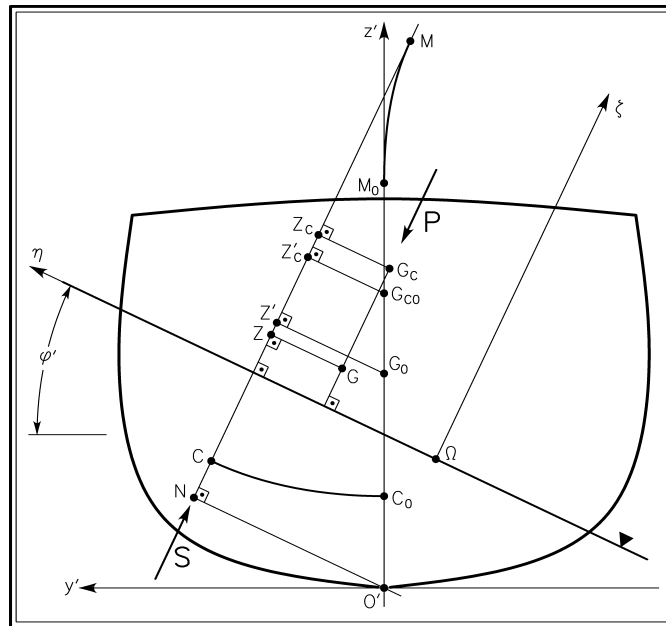


TAVOLA VII – Inclinazioni trasversali qualunque

Analizziamo, nelle ipotesi fatte, gli sbandamenti qualunque¹⁹ indicando con il pedice 0 i punti relativi alla posizione di riferimento (generalmente diritta); M è il metacentro trasversale e G_C il centro di gravità corretto per carichi deformabili. Non ci dilunghiamo nella definizione a parole di N e dei diversi punti Z che è del tutto evidente dalla TAVOLA VII. Sia il peso della nave P che la spinta d'Archimede S giacciono sul piano $y'z'$; gli assi ζ ed η sono paralleli al piano $y'z'$, dunque è possibile rappresentarli in vera grandezza assieme alla proiezione di Ω in direzione ξ che è normale a $y'z'$.

Il momento della coppia formata dalla forza d'Archimede e dalla forza peso è pari al

17. Usualmente l'assetto non supera il 2 o 3%. Se anche fosse del 10% ($\vartheta = 5^\circ 43'$) l'errore commesso confondendo il coseno con l'unità sarebbe del mezzo per cento.

18. A scanso di equivoci ricordiamo comunque che il vettore che rappresenta un momento generato da forze idrostatiche **deve** giacere sul piano di galleggiamento; se così non fosse esisterebbe una componente verticale del momento che farebbe ruotare la nave su sè stessa come una trottola il ché è, palesemente, un controsenso.

19. Spesso vengono definiti *finiti* in contrapposizione agli spostamenti *piccoli*, trattati come *infinitesimi*, per i quali vale il *metodo metacentrico*.

prodotto del peso per il braccio²⁰

$$(30) \quad \mathcal{M} = P \overline{GZ}$$

mentre l'altezza del galleggiamento, calcolabile con la (15) essendo il peso e la spinta uguali in modulo, è

$$(31) \quad h = \zeta_G - \zeta_C = \overline{CZ} \quad .$$

La posizione del centro di carena, quando lo sbandamento è grande, si discosta sensibilmente da quella determinabile con il metodo metacentrico. Al contrario l'errore commesso considerando che il centro di gravità si muova su una circonferenza con centro in G_C è spesso modesto. Questo avviene perché soltanto una parte della massa della nave è soggetta a spostamenti e deformazioni e perché le deformazioni e gli spostamenti sono limitati. Per questo motivo, fatte le debite verifiche, talora, e soprattutto nella fase iniziale del progetto, si potranno sfruttare le seguenti semplificazioni discendenti dal fatto che G_C e G_{C_0} sono confondibili:

$$(32) \quad \overline{GZ} = \overline{G_C Z_C} \simeq \overline{G_{C_0} Z'_C} \quad e \quad \overline{CZ} = \overline{CZ'} - \overline{ZZ'} \simeq \overline{CZ'} - \overline{G_0 G_{C_0}} (1 - \cos\varphi')$$

Come annunciato nell'introduzione abbiamo ottenuto una semplice formula *integrale* (31) fruibile dagli utenti dei calcoli idrostatici; essa corrisponde all'*integrale indefinito* della curva dei bracci \overline{GZ} . L'energia specifica accumulata nello sbandamento della nave dal galleggiamento 1 al 2, che è l'integrale definito di detta curva tra φ_1 e φ_2 , corrisponde all'altezza dello sbandamento come gi' introdotto nella (14).

$$(33) \quad H_{1,2} = h_2 - h_1 = \overline{CZ}_2 - \overline{CZ}_1$$

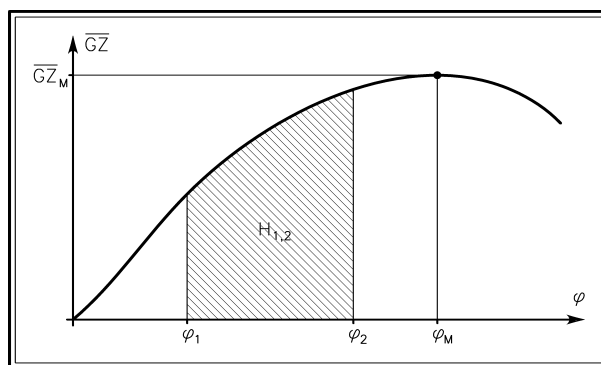


TAVOLA VIII – Curva dei bracci \overline{GZ}

²⁰. Spesso questo braccio è detto *braccio di stabilità* forzando alquanto la definizione di *stabilità*.

§ 7. Derivata, massimo e punto di massimo della curva dei bracci \overline{GZ}

A completamento del lavoro fatto riportiamo alcune considerazioni su due parametri significativi: il massimo braccio $(\overline{GZ})_M$ e lo sbandamento φ_M al quale si verifica (TAVOLA VIII). Impostiamo il calcolo della derivata di \overline{GZ} come da definizione con due avvertenze:

- a. la variabile secondo cui deriviamo è φ'^{21} ,
- b. trascuriamo l'ulteriore variazione d'assetto dovuta ad un incremento dello sbandamento²².

Consideriamo il galleggiamento 1 in corrispondenza del quale vogliamo calcolare la derivata ed il galleggiamento 2 risultante da un incremento δ di φ' .

$$(34) \quad \left(\frac{d\overline{GZ}}{d\varphi'} \right)_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\overline{GZ}_2 - \overline{GZ}_1}{\delta}$$

Limitiamo δ in modo che il metodo metacentrico sia valido sia per la determinazione della posizione del centro di carena che per il calcolo del centro di gravità. Introduciamo l'angolo $\alpha = M\widehat{G_C}Z_{C1}$ come dal dettaglio ingrandito nella TAVOLA IX. Possiamo scrivere le seguenti relazioni

$$(35) \quad \begin{aligned} \overline{G_1Z_1} &= \overline{G_CZ_{C1}} = \overline{MG_C} \cos\alpha \\ \overline{G_2Z_2} &= \overline{G_CZ_{C2}} = \overline{MG_C} \cos(\alpha - \delta) = \underbrace{\overline{MG_C} \cos\alpha}_{\overline{G_1Z_1}} \cos\delta + \underbrace{\overline{MG_C} \operatorname{sen}\alpha}_{\overline{MZ_{C1}}} \operatorname{sen}\delta \end{aligned}$$

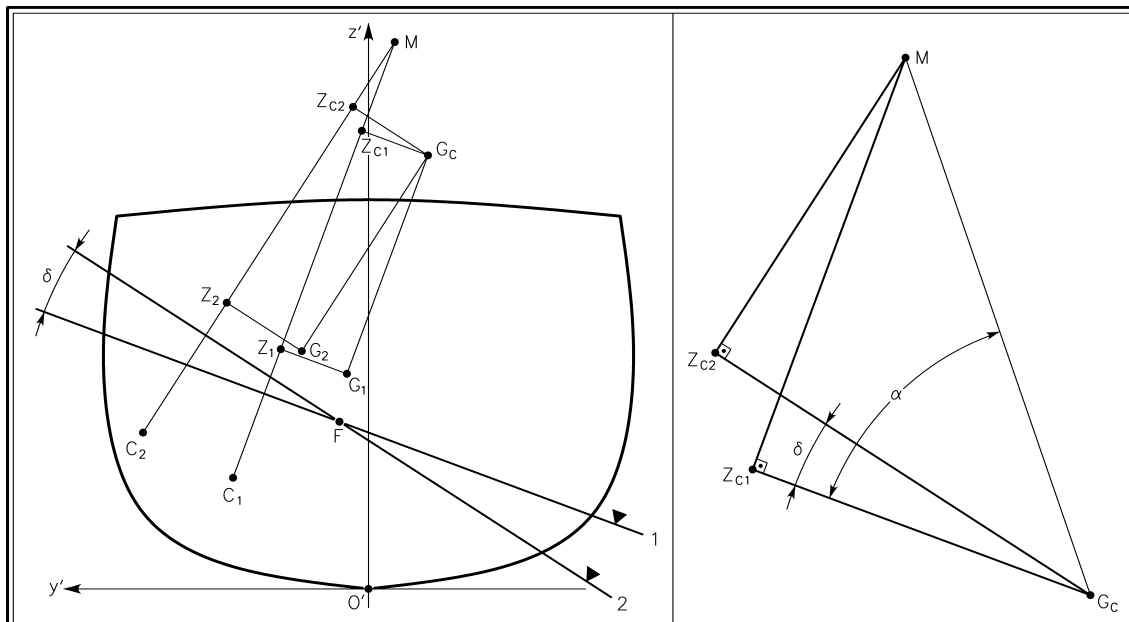


TAVOLA IX – Variazione del braccio \overline{GZ} con lo sbandamento

21. In generale non ci serve il valore della derivata di per sè ma soltanto determinare il punto in cui si annulla; qualora servisse si può facilmente ricavare il valore della derivata in φ con le regole di derivazione delle funzioni composte.
22. Tale angolo è molto piccolo (anche in valore relativo) perché la forma della figura di galleggiamento, ancorché inclinata, è tale che l'asse principale d'inerzia relativo al raggio d'inerzia minimo ha direzione prossima a quella dell'asse y' . In oltre l'errore indotto altera il valore della derivata ma non il punto in cui essa si annulla.

e sostituirle nella (34)

$$(36) \quad \left(\frac{d\overline{GZ}}{d\varphi'} \right)_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\overline{G_1Z_1} \underbrace{\frac{\cos\delta - 1}{\delta}}_{\rightarrow 0} + \overline{MZ_{C1}} \underbrace{\frac{\sin\delta}{\delta}}_{\rightarrow 1} \right)$$

ottenendo al fine, lasciando cadere il pedice 1,

$$(37) \quad \frac{d\overline{GZ}}{d\varphi'} = \overline{MZ_C} \quad .$$

Ciò significa che il massimo braccio si realizza quando il metacentro M corrisponde con Z_C cioè quando è allineato con il centro di gravità secondo l'angolo φ' . In questo modo diventa facile imporre che φ'_M sia maggiore od uguale ad un $\overline{\varphi}'$ fissato: basta²³ prendere in considerazione proprio lo sbandamento $\overline{\varphi}'$ e porre che il centro di gravità corretto si trovi nel semipiano inferiore determinato dalla retta passante per il metacentro e parallela alla traccia del piano di galleggiamento. Se, poi, è possibile confondere G_C con G_{C0} e questo si trovi sull'asse z' la condizione diviene ancora più semplice

$$(38) \quad \overline{O'G_{C0}} \cos\varphi' \leq (\overline{NM})_{\overline{\varphi}'} \quad .$$

§ 8. Pantocarene isocline integrate

Per tutto quanto detto è auspicabile che in futuro alle *istruzioni al capitano* vengano acclusi, in forma tabulare o grafica, i dati relativi a $\overline{O'N}$, \overline{NC} , \overline{CM} e Δi ²⁴ per tutte le combinazioni di dislocamenti, assetti iniziali e sbandamenti ragionevolmente utili.

Tale insieme di dati potrebbe chiamarsi *pantocarene isocline integrate*, che in seguito indicheremo per brevità con PII, perché prevede le stesse combinazioni di dislocamenti, assetti iniziali e sbandamenti delle usuali *pantocarene isocline* ma è più completo perchè gli $\overline{O'N}$ vengono integrati con gli \overline{NC} , i \overline{CM} ed i Δi . In oltre possiamo sfruttare il doppio senso dell'aggettivo *integrate* per ricordare che permettono il calcolo *integrale* dell'energia dello sbandamento.

Le PII sono fruibili con metodologie simili a quelle delle usuali pantocarene isocline: fissato un dislocamento ed un assetto iniziale, per ogni angolo di sbandamento il braccio \overline{GZ} si calcola sempre allo stesso modo

$$(39) \quad \overline{GZ} = \overline{O'N} - z'_G \sin\varphi' - y'_G \cos\varphi'$$

²³. È necessaria una certa cautela perchè potrebbero esserci due o più massimi relativi e quello che solitamente interessa è il massimo che si realizza allo sbandamento minore; questo è tutto da verificare.

²⁴. Assetto longitudinale della nave equilibrata longitudinalmente dopo lo sbandamento.

ed altrettanto semplicemente può essere calcolata l'energia di uno sbandamento

$$(40) \quad \begin{cases} h_1 = z'_{G1} \cos\varphi'_1 - y'_{G1} \sin\varphi'_1 - \overline{CN}_1 \\ h_2 = z'_{G2} \cos\varphi'_2 - y'_{G2} \sin\varphi'_2 - \overline{CN}_2 \\ H_{1,2} = h_2 - h_1 \end{cases}$$

e la derivata della curva dei bracci

$$(41) \quad \left(\frac{d\overline{GZ}}{d\varphi'} \right) = \overline{MG}_C = \overline{NC} + \overline{CM} - z'_G \cos\varphi' + y'_G \sin\varphi' - \overline{GG}_C$$

(come riferimento si veda la TAVOLA VII).

In conclusione sottolineiamo che, in fase di compilazione delle PII, è opportuno tenere conto della variazione d'assetto della nave durante lo sbandamento. A tal fine bisogna conoscere il centro di gravità e la sua eventuale variazione con l'assetto e lo sbandamento; per rispettare rigorosamente tale condizione bisognerebbe aumentare immensamente il numero di possibili combinazioni rendendo ingombrante e scomodo l'insieme dei dati. Osserviamo, però, che il raggio metacentrico longitudinale è notevolmente più grande della variazione di posizione di G nelle diverse condizioni di carico. Pertanto è lecito fissare arbitrariamente una posizione verosimile del centro di gravità e realizzare le PII senza farlo variare perché gli errori indotti da tale semplificazione sono trascurabili in tutti i casi non degeneri.

§ 9. Confronto

Per palesare la convenienza dell'uso delle formule integrali sopra esposte proponiamo un altro esempio numerico. Consideriamo una nave che galleggia inizialmente diritta sia longitudinalmente che trasversalmente. Il dislocamento è di 16'500 t, il baricentro ha una distanza dalla linea di costruzione $z_G = 12 m$ costante (non ci sono specchi liquidi o carichi appesi o deformabili); essendo la nave inizialmente diritta x_G corrisponde con x_{C0} ed y_G è nullo; la lunghezza tra le perpendicolari è 185 m. Vogliamo calcolare l'energia necessaria a sbandare la nave di 45 gradi.

Il procedimento classico prevede l'integrazione numerica della curva dei bracci. Bisogna leggere dalle pantocarene isocline, per un numero sufficiente di angoli, gli $\overline{O'N}$ e poi determinare i relativi bracci con la (39) che, nel nostro caso, diviene

$$\overline{GZ} = \overline{O'N} - z_G \sin\varphi \quad .$$

Riportiamo nella seguente TABELLA II i risultati dei calcoli necessari. L'intervallo di 5 gradi espresso in radianti è

$$\lambda = 5 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{36}$$

TABELLA II – Integrazione numerica della curva dei bracci

φ	$\overline{O'N}$	$z_G \text{ sen}\varphi$	\overline{GZ}	f_s	$f_s \times \overline{GZ}$
0°	0,0000	0,0000	0,0000	1,5	0,0000
5°	1,2719	1,0459	0,2260	2,5	0,5650
10°	2,5286	2,0838	0,4448	4	1,7792
15°	3,7481	3,1058	0,6423	2	1,2846
20°	4,9049	4,1042	0,8007	4	3,2028
25°	5,9714	5,0714	0,9000	2	1,8000
30°	6,9349	6,0000	0,9349	4	3,7396
35°	7,8046	6,8829	0,9217	2	1,8434
40°	8,6038	7,7135	0,8903	4	3,5612
45°	9,3251	8,4853	0,8398	1	0,8398
				$\Sigma =$	18,6156

pertanto l'area, applicando la regola di *Simpson*²⁵, risulta

$$(42) \quad A_{0,45} = \frac{\lambda \Sigma}{3} = \frac{\pi \times 18,6156}{36 \times 3} = 0,5415 \text{ rad} \times m \quad .$$

Per ottenere lo stesso risultato usando le PII leggiamo, per il dislocamento e l'assetto iniziale detti,

$$\overline{NC}_0 = 3,5141 \text{ m} \quad , \quad \overline{NC}_{45} = -0,5402 \text{ m} \quad e \quad \Delta i_{45} = 2,4389 \text{ m}$$

e calcoliamo l'altezza del galleggiamento iniziale ($\vartheta = \varphi = 0$)

$$h_0 = z_G - \overline{NC}_0 = 12 - 3,5141 = 8,4859 \quad .$$

L'assetto del galleggiamento finale corrisponde ad un angolo $\vartheta = \text{arctg}\left(\frac{\Delta i_{45}}{L_{PP}}\right) = 0^\circ 45'$ pertanto, essendo $\cos\vartheta = 0,9991$, possiamo confondere z con z' e φ con φ' ; l'altezza del galleggiamento vale

$$h_{45} = z_G \cos(45^\circ) - \overline{CN}_{45} = 12 \sqrt{0,5} - (-0,5402) = 9,0255 \text{ m}$$

ed, in definitiva, l'altezza dello sbandamento risulta

$$H_{0,45} = h_{45} - h_0 = 9,0255 - 8,4895 = 0,5360 \text{ m} \quad .$$

Come prevedibile $H_{0,45}$ è molto prossimo ad $A_{0,45}$; le differenze, l'uno per cento in questo caso, sono da attribuirsi alle approssimazioni nell'integrazione numerica necessaria per calcolare $A_{0,45}$.

Se ora vogliamo verificare che il massimo braccio si verifica per un angolo maggiore di 30° dobbiamo calcolare la derivata della curva dei bracci per $\varphi = 30^\circ$. In genere un calcolo di questo tipo risulta ostico ed approssimato. Se abbiamo a disposizione le PII basta leggere \overline{CM}_{30}

25. Dobbiamo integrare numericamente una curva descritta da un numero pari di punti pertanto il primo intervallo, ove la curva è praticamente rettilinea, è stato integrato con il metodo dei trapezi.

ed \overline{NC}_{30} , che nel nostro caso sono $8,9011 m$ e $1,6037 m$, ed applicare la (41) (in questo caso ϑ è ancora più piccolo)

$$\left(\frac{d\overline{GZ}}{d\varphi} \right)_{30} = \overline{NC}_{30} + \overline{CM}_{30} - z_G \cos(30^\circ) = 1,6037 + 8,9011 - 12 \sqrt{0,75} = 0,1125 m$$

da cui risulta che la derivata è positiva (senza approssimazioni né valutazioni discutibili) e dunque il massimo si verifica per un angolo superiore ai 30° .

§ 10. Conclusioni

Il calcolo integrale dell'altezza di uno sbandamento è uno strumento agile e potente che presenta molteplici vantaggi e nessuna controindicazione.

- a. Le *pantocarene isocline integrate* e le usuali *pantocarene isocline* hanno costi computazionali dello stesso ordine di grandezza.
- b. La determinazione dell'altezza di uno sbandamento con le formule integrali proposte è notevolmente più rapida e più precisa dell'usuale integrazione della curva dei bracci. In oltre, essendo la differenza di lunghezze fisiche ben determinate, è possibile realizzare una rapida ed efficace verifica *ad occhio* (gli ingegneri sanno bene l'importanza di tali verifiche, in ogni campo, soprattutto quando ci si affida ai calcolatori elettronici).
- c. Il progettista che debba perfezionare il piano di costruzione di una nave sarà esattamente gli effetti sull'altezza dei galleggiamenti che le modifiche comportano: modificando i volumi di carena si sposta anche il centro di carena e dalla variazione della posizione del centro di carena nei diversi galleggiamenti sappiamo gli effetti sull'altezza degli sbandamenti. Tenendo ciò presente le modifiche sul piano di costruzione possono essere mirate a raggiungere i valori desiderati con notevole precisione oppure si possono fare modifiche ispirate da altre necessità tenendo sotto controllo gli effetti sull'altezza degli sbandamenti.
- d. La presenza a bordo delle navi delle PII renderà possibile il calcolo esatto e rapido dell'altezza degli sbandamenti per ogni nuova condizione di carico mentre oggi spesso si procede per *somiglianza* con le condizioni di carico fornite nel manuale d'istruzioni al capitano. Ancora più utile risulterà in tutte quelle situazioni eccezionali, d'emergenza o anomale in cui è necessario realizzare rapidamente ma con affidabilità le dovute verifiche.

Trieste, li 5 febbraio 2003

Vincenzo de' Vidovich

